



XII. MAGYAR MECHANIKAI KONFERENCIA

MaMeK, 2015

Miskolc, 2015. augusztus 25-27.

TÉGLATESTEK OPTIMÁLIS CSOMAGOLÁSA

Kovács Flórián¹

¹ BME, Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

1111 Budapest, Műgyetem rakpart 3.

kovacs.florian@epito.bme.hu

Absztrakt: Téglatestekre illeszkedő zárt, súrlódásmentes kötélszakaszokból álló hálózatokat vizsgálunk a téglatestek csomagolásának modelljeként. Keressük a fenti kötélszakaszok közül a legkisebb számú zárt hurkot, illetve legkisebb összhosszat eredményező olyan elrendezéseket, melyek előfeszítéssel stabilizálhatók. Megmutatjuk, hogy a „hagyományos”, azaz élekkel párhuzamosan futó kötelekből álló stabil hálózathoz képest a legkisebb összes kötélszakasz – a test geometriájától függően – akár 50%-kal is csökkenthető, amennyiben a kötelek ferdén haladnak. Kitérünk ezek mellett a talált elrendezések optimumának robusztusságára is.

Kulcsszavak: konvex poliéder, kötélszakasz, másodlagos merevség, geodetikus vonal

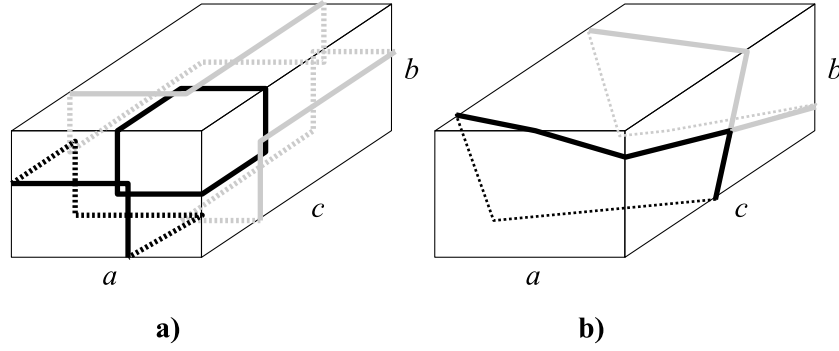
1. BEVEZETÉS

Téglatest alakú csomagok és felületükön vezetett szalagok matematikai-mechanikai értelemben felfoghatók zárt, merev poliédere felszínre feszített kötélszakaszokként. Az ilyen kötélszakaszok alkotott csomagolást stabilnak nevezzük, ha a kötélszakaszok léteznek olyan sajátfeszültségi állapota, amely tetszőleges infinitezimális elmozdulásrendszerrel szemben másodrendű merevséget [1] biztosít. Ennek hétköznapi értelmezése, hogy a (nyújthatatlannak képzel) szalagokat nem tudjuk vágás nélkül eltávolítani az ugyancsak deformálhatatlannak tekintett csomag felületéről. Stabil konfigurációkra irányuló vizsgálataink négy egyszerűsítő feltevése, hogy

- (1) a kötelek nyúlásmentes zárt hurkokat alkotnak,
- (2) két kötélszakasz érintkezésénél (vagyis a csomópontokon) a kötelek csomózás nélkül, önmagukon („önérintkező hurok”) vagy egymáson („érintkező hurkok”) irányt változtatva haladnak át (a pusztán egymás fölött futó, de irányt nem változtató köteleket megkülönböztetésül „keresztelő” köteleknek hívjuk),
- (3) a kötélszakasz és a téglatest élei között („lapváltásnál”), valamint két kötélszakasz érintkezésénél (csomópontnál) fellépő súrlódást elhanyagoljuk, azaz a kötélszakasz egy hurok teljes hosszán állandó,
- (4) csomópontok és/vagy lapváltások nem eshetnek egybe, azaz csak tipikus konfigurációkat vizsgálunk.

Az utolsó előtti feltételből adódóan két szomszédos csomópont között a kötelek geodetikus vonalat követnek a poliéder felületén, mely vonalak tulajdonságai nagyban függenek a szóban forgó felület geometriájától [2]. Egy korábbi vizsgálatban [3] igazoltuk, hogy a fenti kritériumok mellett egyetlen zárt hurok még tetszőleges számú önérintkezés mellett sem adhat stabil csomagolást. Ezen állítás igazságát illusztrálhatjuk azáltal, hogy a kérdéses poliédert síkba fejtjük az egyes hurkok mentén. Adott hurok a poliéder egy lapját többször is átszelheti, vagyis egy lapot többször is (vagy akár egyszer sem) tartalmaz a kapott síkbeli alakzat, melyen a csomópontok közötti geodetikus vonalak egyenes szakaszok. Önmetszés esetén a csomópontból kifelé mutató négy kötélszakasz-vektor nagysága azonos, vagyis az átteljes erő közös hatásvonalba esnek. Mindebből következik, hogy a hurok egyetlen egyenes mentén, a poliéder valamely élével alkotott P metszéspontjából indulva is végigkövethető, amennyiben a csomópontoknál átváltunk az érintkező kötélszakaszra. A kötélszakasz teljes hosszán végigjárva ismét ugyanazon él megfelelő pontjába érkezünk, vagyis a hurok a síkon egy PP' szakaszra felel meg. Mivel azonban – a fenti utolsó feltétel értelmében – minden ilyen PP' szakasz eltolható a szóban forgó él mentén egy kicsiny Δx mértékben, mely által a hurok teljes hossza változatlan marad, a hurok helyzete még előfeszítés esetén sem lehet stabil. Megjegyzendő, hogy (i) a kicsiny eltolás a csomópontok PP' menti helyzetét is változtatja, (ii) a fenti gondolatmenet érvényét veszti, ha hármas vagy többes érintkezés lehetőségét is fenntartjuk.

Stabil csomagolást tehát csak egynél több érintkező hurok esetén érdemes keresnünk. Ugyancsak [3]-ban külön foglalkoztunk a téglatestek élével párhuzamosan futó szakaszokból álló hálózatokkal („egyes csomagolás”, 1.a ábra), melyek esetében fennáll, hogy legalább négy zárt hurok szükséges a stabil csomagoláshoz. Ha az élekkel nem párhuzamos kötélszakasz is megengedett („ferde csomagolás”, 1.b ábra), a hurkok minimális száma csupán kettő.



1. ábra. Stabil egyenes csomagolás négy hurokkal (a) és stabil ferde csomagolás két hurokkal (b).

A további fejezetekben először rövid betekintést adunk egy adott poliéderszín görbületi viszonyai és a felületi geodetikus vonalhálózatok közötti összefüggésekbe, majd megkísérjük olyan stabil (jellemzően ferde) csomagolásokat előállítani egy a, b, c oldalhosszakkal rendelkező téglatestre, melyek összhossza kisebb az egyenes csomagolásnál adódó minimális összhossznál. Könnyen belátható, hogy ez a minimumérték $4(a + b + c)$, ugyanis egyenes csomagolás esetén minden lapon annak mindkét élével párhuzamosan kötélszakaszoknak kell húzódnuk. Tegyük föl ennek ellenkezőjét: ha egy ilyen éllel párhuzamos kötélszakasz hiányzik, akkor az a szomszédos és átellenes lapokon sem folytatódhat, ennek következményeként csak két átellenes lapon lehetnek keresztező vagy érintkező kötelek. Két keresztezés esetében két zárt síkbeli hurok adódik, egyébként pedig az érintkezési pont(ok) a tartalmazó lap(ok) síkjában, azok élével bezárt 45 fokos szögben nyúlásmentesen mozgatható(k) addig, amíg egy érintkezési pont fedésbe nem kerül valamely éllel – nyilvánvalóan a fenti esetek mindegyike kizárja a stabil csomagolás lehetőségét. A ferde csomagolások esetében megvizsgáljuk, hogy a hossznyereség mértéke („optimumarány”) miként függ az élhosszak arányától, végül kitérünk ezen optimumok robusztus vagy törékeny voltának vizsgálatára, azaz arra, hogy egy optimális konfiguráció „közelében” felvett másik hálózat is „közel” optimális-e.

2. A GAUSS–BONNET-TÉTEL ÉS KÖVETKEZMÉNYEI

A fejezetcímbe szereplő tételnek különböző megfogalmazásai ismertek [4], állítása gömbbel homeomorf felületen, mint amilyen egy téglatest is, az alábbi formában is megfogalmazható: egy adott felületen futó zárt görbe geodetikus (azaz érintősíkra vetített) $\kappa_g(s)$ görbületeinek hossz menti integrálja, illetve a görbe által határolt felületi pontok Gauss-görbületének (K) a körbezárt felületre vett integrálja összegezve 2π -t ad. A geodetikus görbület mellett koncentrált δ_i szögtöréseket, illetve a K integrálja mellett koncentrált szögdefektust (D_j) is megengedve a következő egyenlet írható föl:

$$2\pi - \sum_{i=1}^k \delta_i - \sum_{j=1}^l D_j = \iint_T K dA + \int_g \kappa_g(s) ds. \quad (1)$$

Mivel az általunk vizsgált felületen a csúcsokon kívül bármely pontban $K \equiv 0$, illetve a kötelekre a csomópontokon kívül bármely pontban $\kappa_g \equiv 0$, a képlet integrálkifejezései elhagyhatók és így annak jobb oldala zérussá válik. További specialitásként vegyük figyelembe, hogy a téglatesten bármely csúcs szögdefektusa $D_j = 2\pi - 3(\pi/2) = \pi/2$, tehát (1) új alakja

$$\frac{\pi}{2}(4 - l) = \sum_{i=1}^k \delta_i, \quad (2)$$

ahol l az adott hurok belsejében lévő téglatest-csúcsok, k pedig a hurok által érintett csomópontok száma. Megjegyzendő, hogy l értéke és így δ_i előjele sem egyértelmű (a téglatest gömbbel való topológiai ekvivalenciája miatt a hurkon belül és kívül eső csúcsok szerepe fölcserélhető, azaz l vagy $8 - l$ számú belső csúcs ugyanazt az esetet jelenti): a továbbiakban feltételezzük, hogy $0 \leq l \leq 4$.

Az egyenes csomagolás esetére szorítkozva további megkötöttség, hogy a δ_i törésszögek csak $\pi/2$ többszöröse lehetnek, illetve a 0 törésszög épp az érintkezés (és így a csomópont) hiányának felel meg (ilyenből e számú előfordulást feltételezünk), a π viszont a kötélni önmagára hajtását és így az összhossz szükségtelen növekedését jelentené, hiszen az előző fejezet végén írottak szerint így is minden lapon (legalább) két kötéldarabnak kell kereszteződnie vagy érintkeznie. Korlátozzuk tehát további vizsgálatainkat a b és j számú pozitív, illetve negatív előjelű $\pi/2$ törésszög esetére, melyekkel hurkonként $4 - l_m = b_m - j_m$ és összesen $\sum b_m + e_m + j_m = 12$.

Három kötélhurok esetén egyszerűen belátható, hogy legalább egyikükre $(l_m, b_m, e_m, j_m) = (1, 3, 0, 0)$ kell, hogy teljesüljön (ez egyetlen csúcsot körülvevő, 6 egyenes szakaszból álló hurkot jelent), ellenkező esetben 3 darab $(2, 2, 2, 0)$ eset adhat csak 12 érintkezést/keresztelést, ez pedig geometriailag lehetetlen. A megmaradó lehetséges

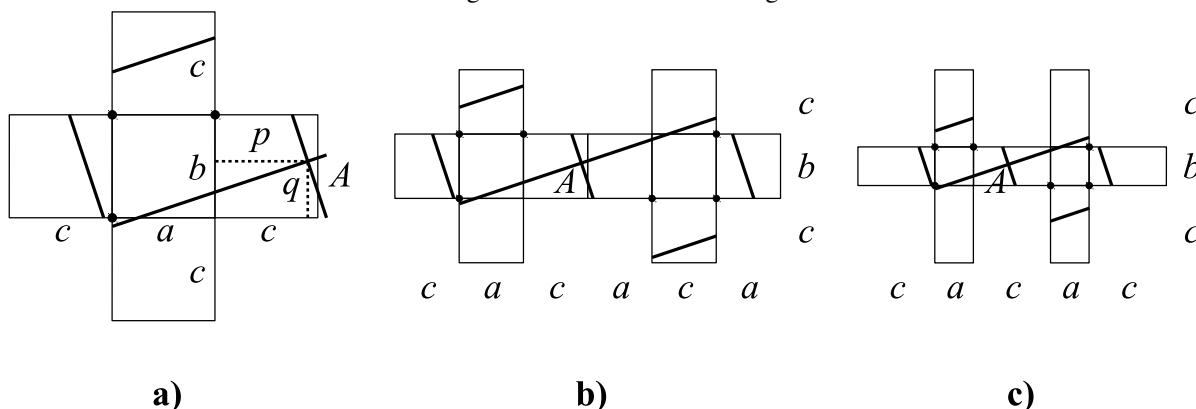
esetek vizsgálatával ezután könnyen belátható, hogy három hurokkal stabil csomagolás nem állítható elő ([3]). Ha a hurkok számát négyre növeljük, akkor viszont az 1.a ábrán látható alakzat már stabil: adott kompatibilis hurkhosszak mellett nyúlásmentesen nem mozgatható, mivel létezik olyan egyparaméteres sajátfeszültségi állapota, amely a csomópontok mind a 12 infinitezimális mozgásával szemben merevséget biztosít.

3. FERDE CSOMAGOLÁS KÉT HUOKKAL

Tekintsünk most két hurkot a téglatest felszínén, melyek egyetlen pontban érintkeznek, azaz mindkét hurokra $k = 1$. A (2) összefüggés értelmében ez az egy érintkezés csak $\pm\pi/2$ törésszög mellett lehetséges, melyhez tartozóan $l = 4 \mp 1$ (a korábbiak értelmében legyen $l = 3$). Figyelembe véve ezen kívül, hogy a két hurok csak akkor feszíthető meg, ha az érintkezési pontban összefutó négy kötélrő páronként közös hatásvonalú, adódik a következtetés, hogy a hurokpár egyetlen, minimum egyszeres keresztezésű zárt geodetikus vonalat követ. A matematikai irodalomban a keresztezésmentes zárt geodetikus vonalak elnevezése *egyszerű* geodetikus vonal (lásd pl. [5]), ennek analógiájára egy önkeresztező geodetikus által meghatározott két érintkező (de külön-külön nem önkeresztező) hurkot szintén egyszerűnek nevezünk. Ezen definíció értelmében tehát egy hurok akkor is egyszerű, ha önmagával nem, de a vele érintkező hurokkal – akár több pontban is – kereszteződik.

Mivel céljaink között továbbra is szerepel a kötélhossz minimalizálása, adott téglatest-geometria mellett mindig a lehetséges legkisebb számú keresztezés esetével, azaz egyszerű hurkokkal foglalkozunk. Belátható ugyanis, hogy a téglatest felületén futó kötelek önmagukat is csak derékszögben keresztezhetik: legyen G egy ilyen önkeresztezési pont. Távolítsuk most el az összetett hurok P érintkezési pontjától a kötélt mentén valamely irányban legközelebb fekvő G önkeresztezési pontig terjedő szakaszát, illetve a másik irányban létező PG szakaszt, és illesszük össze a hurkot G -nél: így módon a keresztezések száma biztosan csökkent, és az eljárás mindaddig folytatható, amíg az utolsó önkeresztezés is el nem tűnik.

Ha egy egyszerű hurok három csúcsot vesz körül, akkor a körbezárt csúcsok egymáshoz viszonyított helyzete topológiai értelemben kétféle lehet (az az eset, amikor semelyik csúcspárt nem köt össze él, azonnal elvethető, mivel a kötélt nem keresztezheti sorban a valamely csúcsban összefutó három él). Első esetben két csúcsot él köt össze, a harmadik csúcs pedig az előző kettő valamelyikével átellenes, a másodikban pedig a három csúcs egyetlen lapra (a továbbiakban *alaplapp*) illeszkedik. Az első esettel most nem foglalkozunk, részint mert a kötélhurok által tartalmazott egyenes szakaszok minimális száma ebben az esetben több, mint a második esetben (ez önmagában még nem bizonyítéka annak, hogy ilyen hálózat összhossza ne lehetne minimális), részint pedig azért, mert ez – szemben a második esettel – nem minden téglatest esetében létező konfiguráció.



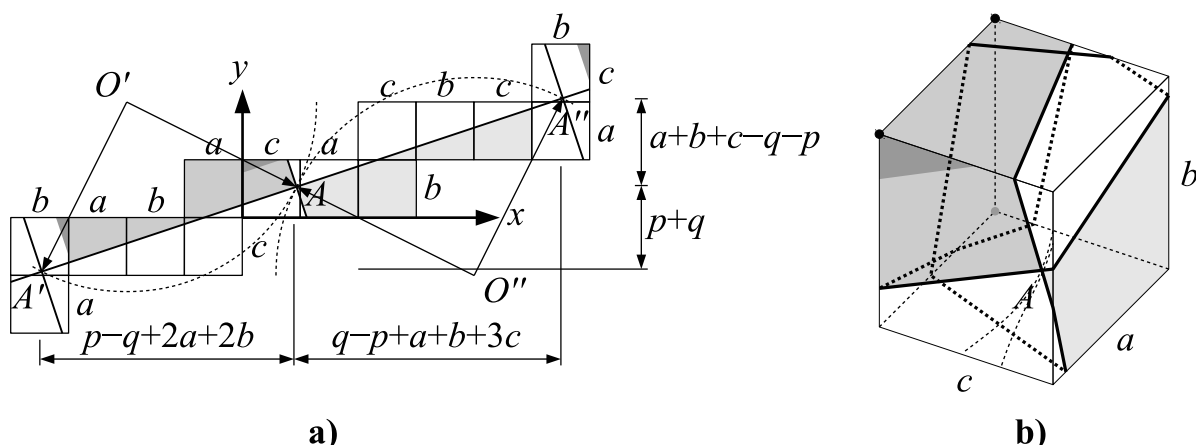
2. ábra. Három csúcsot körülvevő ($\pi/2$ törésszögű) egyszerű hurok (a); $\pi/2$ törésszögű hurkokból alkotott egyszerű hurokpárok alapesetei: a körbevett (és fekete körrel jelölt) három-három csúcs szomszédos (b) vagy átellenes lapokra (c) illeszkedik.

Legyen tehát alaplap a 2.a ábra a, b élhosszú lapja. Egyszerűen belátható, hogy tetszőleges geometriájú téglatest esetében a szóban forgó zárt hurok az alaplaptól jobbra vagy lefelé mindig tartalmazhat törést. Tekintsünk ugyanis egy, az alaplap négy csúcsát körülvevő, a csúcsokhoz igen közel futó (törésmentes, azaz geodetikus) hurkot és azon egy pontot: a pont körül az eredetihez képest kis szöggel elforgatott hurok esetén előbb-utóbb az alaplap negyedik csúcsa a kötélt külső oldalára kerül (ehhez értelemszerűen a kötélhossz növelésére és egy új töréspont beiktatására is szükség van). Látható, hogy az így módon keletkező töréspont az épp a hurkon kívülre kerülő csúccsal szomszédos valamely alaplappal szomszédos lapon, a csúcs közelében jön létre. A 2.a ábra szerinti felső vagy balra eső lapra ez a töréspont csak akkor kerülhet, ha az előbbi gondolat kísérletben nyert, három csúcsot körülvevő hurkot a test felszínén (hálózatán) elforgatjuk, amire viszont ismét csak bizonyos oldalárányok mellett van lehetőség (a c élnek kell viszonylag hosszúnak lennie a másik kettőhöz képest). Ezt az esetet – annak speciális voltára tekintettel – nem vizsgáljuk, ekkor viszont a szimmetria miatt az általánosság csorbitása nélkül feltehetjük,

hogy a törés az alaplaptól jobbra helyezkedik el. Topológiai értelemben két esetet tekintünk a keresztezés pontos helyére nézve: az vagy a két hurok alaplapja közötti egyetlen lapra esik és így a két alaplap átellenes helyzetű ((c) ábra), vagy a közöttük lévő lappár valamelyikén ((b) ábra) helyezkedik el, ekkor az alaplapoknak közös élük van, melynek végpontjait mindkét hurok tartalmazza (tehát a két egyszerű hurok *egymást keresztezi*). Elvileg kettőnél több lap is elválaszthatja az alaplapokat, ekkor viszont már a ferde hurokok összhossza jellemzően meghaladja az egyenes csomagolásra kapott értéket, sőt legalább négy elválasztó lap esetén valamely hurok szükségszerűen önkeresztezővé válik, így ezekkel az esetekkel nem foglalkozunk.

4. EGYMÁST KERESZTEZŐ EGYSZERŰ HURKOK

Az iménti (b) esetből kiindulva vizsgáljuk meg a stabil csomagolást adó hurokpár létezésének feltételeit. Jelölje p és q a töréspontnak az alaplap körbe nem vett csúcsától mért vízszintes és függőleges távolságát (2.a ábra). A korábban ismertetett feltétel szerint a két hurok egyetlen egyenes mentén síkba fejthető, lásd a 3.a ábrát. Itt a különböző hurok által körülvelt felületrészt különböző árnyalattal kiemelve látható az A -beli érintkezés.



3. ábra. Szomszédos oldali csúcshármaszt körbevevő hurok; (a) ábra: a hurokpár mentén síkba fejtett felület, sötétebb, illetve világosabb szürkével jelölve az egyes hurok által határolt felszínhányad (a tartományok részben egymást is fedik, A , A' és A'' ugyanannak az érintkezési pontnak a képei). (b) ábra: a téglatest térbeli képe.

Mindkét ábrán a sötétszürke háromszögek ugyanazt a lapot jelölik.

Az $A'A$ és AA'' azonos meredeksége alapján felírható, hogy

$$(p+q)(q-p+a+b+3c) = (p+q-a-b-c)(q-p-2a-2b),$$

melyből

$$a+b = p+2q,$$

tehát az A érintkezési pontok mértani helye egy $x = a+b$, $y = (a+b)/2$ tengelymetszetekkel megadott egyenes. Rögzítsük a hurok hosszát A pont felvételével, majd írjuk föl a bal oldali hurok hosszának négyzetét $A(x, y)$ önmagában (tehát a másik hurokkal való érintkezés nélkül) lehetséges helyzeteinek függvényében:

$$\begin{aligned} h^2 &= (x+y)^2 + (x-y+2a+2b)^2 \\ &= 2(x-(a+b))^2 + 2(y+(a+b))^2, \end{aligned}$$

ami egy $O'(-a-b, a+b)$ középpontú, $h/\sqrt{2}$ sugarú kör egyenlete. Hasonló megállapítás tehető a másik hurokra is, ahol a középpont koordinátái $O''(a+b+2c, -c)$. Látható, hogy az $O'O''$ egyenes áthalad A pont (p, q) által megadott helyén, vagyis az egyes hurok nyúlásmentes mozgása az A pontnak egyszerre az O' és O'' középpontú, érintő helyzetű köríven való elmozdításával járna, ami lehetetlen: a fenti eljárással létrehozott egyszeres érintkezésű hurokpár stabil csomagolást biztosít. Mivel az $A'A''$ egyenes meredeksége a 3.a ábra alapján mindig $1/3$, ezért $\overline{A'A''} = \sqrt{10}(a+b+c)$. Kijelenthető tehát, hogy az ilyen hurokpár a stabil egyenes csomagoláshoz képest $\sqrt{10}/4 \approx 0,7906$ -szeres kötélhosszt igényel.

Vizsgáljuk meg, hogy a fenti gondolatmenet milyen geometriai korlátok mellett érvényes, azaz milyen a, b, c oldalhosszak szükségesek ahhoz, hogy az $A'A''$ egyenes végig a 3.a ábra szerinti lapokon haladjon át. Mivel az ott látható kifejtésben A' és A'' jelentik egy periódus két végpontját, a közöttük lévő három „lépcső” relatív meredeksége vizsgálendő. Tekintettel arra, hogy az egyes lépcsők adatai az a, b, c ciklikus permutációjával egymásba vihetők, a három oldalhossz közül egyik sem kitüntetett a másik kettőhöz képest. Tegyük ezért föl, hogy $A'A''$

jobb szélső helyzetében a c magasságú lépcsőkhöz támaszkodik, amelyből az alábbi két egyenlőtlenség következik:

$$\frac{c}{2a+b} \geq \frac{1}{3}; \quad \frac{b}{2c+a} \leq \frac{1}{3}.$$

Mindezek mellett az is szükséges, hogy $A'A''$ ne messe a felső lépcsőket, melyből további két összefüggés adódik:

$$\frac{c}{2a+2b} \leq \frac{1}{3}; \quad \frac{b}{c+a} \geq \frac{1}{3}.$$

c értékét az általánosság csorbítása nélkül 1-nek véve a fenti négy egyenlet az alábbi alakra hozható:

$$\text{a) } 1 \geq \frac{a}{3/2} + \frac{b}{3}; \quad \text{b) } 1 \geq \frac{a}{-2} + \frac{b}{2/3}; \quad \text{c) } 1 \leq \frac{a}{3/2} + \frac{b}{3/2}; \quad \text{d) } 1 \leq \frac{a}{-1} + \frac{b}{1/3}. \quad (3)$$

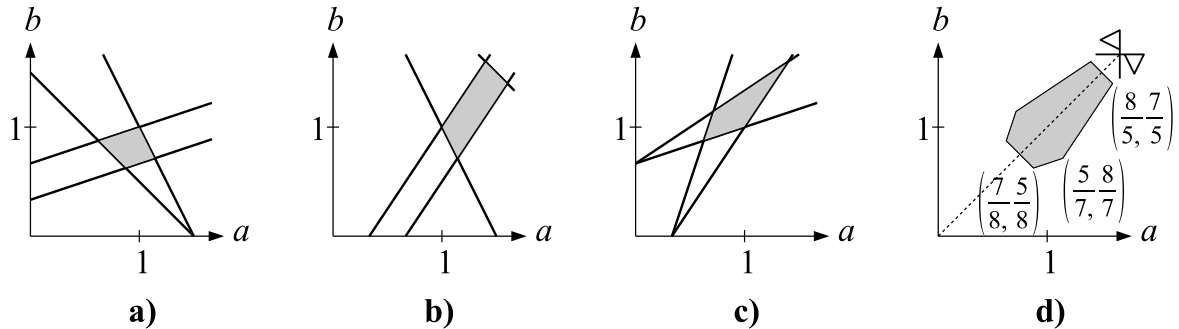
Ugyanezen összefüggések az $a, b, c \rightarrow b, c, a$ módosítással ($A'A''$ az a magasságú lépcsőkhöz illesztett):

$$\text{a) } 1 \leq \frac{a}{1/3} + \frac{b}{-1/2}; \quad \text{b) } 1 \leq \frac{a}{3/2} + \frac{b}{3}; \quad \text{c) } 1 \geq \frac{a}{2/3} + \frac{b}{-1}; \quad \text{d) } 1 \geq \frac{a}{3} + \frac{b}{3}, \quad (4)$$

illetve egy újabb ciklikus eltolással (b magasságú lépcső):

$$\text{a) } 1 \leq \frac{a}{2/3} + \frac{b}{-2}; \quad \text{b) } 1 \geq \frac{a}{1/3} + \frac{b}{-1/2}; \quad \text{c) } 1 \geq \frac{a}{-1} + \frac{b}{2/3}; \quad \text{d) } 1 \leq \frac{a}{1/3} + \frac{b}{-1}. \quad (5)$$

A kapott tartományokat, illetve ezek unióját a 4.a–d ábrák illusztrálják.



4. ábra. Egyszeresen érintkező, egymást keresztező hurokpárral stabilan csomagolható téglatestek oldalirányai ($c = 1$); (a)–(c) ábrák: a (3), (4), és (5) egyenlőtlenségek metszethalmazai, (d) ábra: az előbbieket ($a = b$ egyenesre szimmetrikus) uniója.

Az egyenes csomagoláséhoz viszonyított optimumirányról korábban beláttuk, hogy az az oldalhosszaktól független: most azt látjuk, hogy ezen optimumok általában nem törekenyek abban az értelemben, hogy a 4.d ábra idomjának bármely belső pontjához tartozó elrendezés kis megzavarása ugyanúgy stabil csomagolásra vezet. Kivételt képeznek a tartomány határának közelében lévő pontokkal jellemzett esetek, amelyek a korábbi levezetés értelmében csúcshoz igen közel futó köteleket jelentenek.

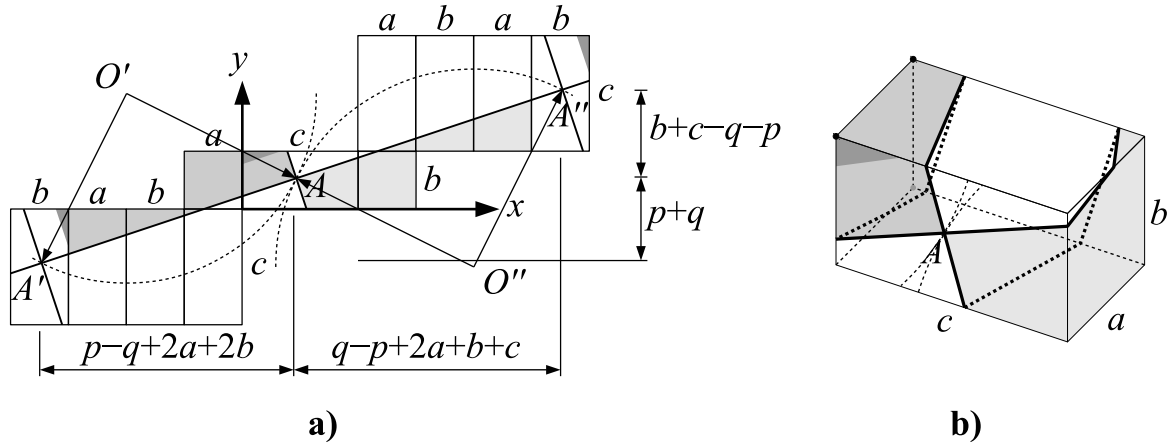
5. EGYMÁST NEM KERESZTEZŐ EGYSZERŰ HURKOK

A 2.c ábrán látható esethez is készítsük el a hurokpár egyenes kötélmenti kifejtését, ez látható az 5.a ábrán. A pont lehetséges helyét itt is a két hurok képének egyenlő meredekségéből számítjuk:

$$(p+q)(q-p+2a+b+c) = (p+q-b-c)(q-p-2a-2b),$$

mely alapján

$$(b+c)(a+b) = p(2a+b) + q(2a+2b+c),$$



5. ábra. Átellenes oldali csúcshármaszt körbevevő hurok; (a) ábra: a hurokpár mentén síkba fejtett felület, sötétebb, illetve világosabb szürkével jelölve az egyes hurok által határolt felszínhányad (a tartományok A -tól eltekintve diszjunktak, A , A' és A'' ugyanannak az érintkezési pontnak a képei). (b) ábra: a téglatest térbeli képe. Mindkét ábrán a sötétszürke háromszögek ugyanazt a lapot jelölik.

tehát az A érintkezési pontok mértani helye itt is egyenes $x = (b+c)(a+b)/(2a+b)$, $y = (b+c)(a+b)/(2a+2b+c)$ tengelymetszetekkel. A hosszak négyzetét fölírva adódik, hogy a hurok töréspontjai nyúlásmentes esetben most is köríven mozognak, a középpontok $O'(-a-b, a+b)$, $O''(a+b+c, -c)$. Fontos különbség azonban, hogy az előző esettől eltérően $A'A''$ egyenes meredeksége az oldalhosszak függvénye, $(b+c)/(4a+3b+c)$, illetve hogy az $A'A''$ periódusra most csak két lépcső esik. Ennek alapján $A'A''$ jobb szélső helyzetére két eset lehetséges: az vagy a c magasságú lépcsőkre támaszkodik és a felső kontúr b -lépcsői sem metszik a hurok vonalát, azaz

$$\frac{c}{3(a+b)} \geq \frac{b}{a+c} \quad \text{és} \quad \frac{b}{c} \geq \frac{b+c}{4a+3b+c},$$

vagy megfordítva:

$$\frac{c}{3(a+b)} \leq \frac{b}{a+c} \quad \text{és} \quad \frac{b}{2a+c} \leq \frac{b+c}{4a+3b+c}.$$

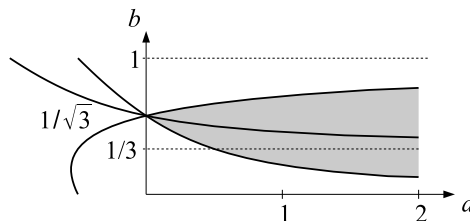
$c = 1$ felvételével az első eset egyenlőtlenségei az alábbi alakra hozhatók:

$$\text{a) } a \leq \frac{3b^2 - 1}{1 - 3b}; \quad \text{b) } a \geq \frac{3b^2 - 1}{-4b} \quad (6)$$

(megjegyezzük, hogy az a) egyenlőtlenség ilyen irányban $b > 1/3$ esetben teljesül, $b < 1/3$ esetben viszont a b) egyenlőtlenség a)-nál mindig erősebb korlátot ad). A két hozzárendelés képe egy-egy hiperbola, melyek a b tengelyen, $a = 1/\sqrt{3}$ -nál metszik egymást, nemnegatív a, b értékekre lásd a 6. ábrát. A második esetben az átalakítás

$$\text{a) } a \geq \frac{3b^2 - 1}{1 - 3b}; \quad \text{b) } a \geq \frac{3b^2 - 1}{2 - 2b} \quad (7)$$

egyenlőtlenségekre vezet, itt a b) esetben említendő, hogy jelen formája csak $b < 1$ -re érvényes ($b > 1$ választással a megforduló egyenlőtlenség csak negatív a -t engedne meg, így ezzel sem foglalkozunk). A b)-ben szereplő hozzárendelés szintén hiperbolát határol, mely az előbb említettekkel közös pontban metszi a b tengelyt (6. ábra). Megjegyzendő az ábrát illetően, hogy itt hiányzik az $a = b$ tengelyre vett szimmetria. Ennek oka, hogy a és b szerepe nem fölcserélhető, hiszen a keresztezést tartalmazó lap az $A'A''$ bármely – kifejtésen belüli – eltolása esetén is szigorúan b, c oldalakkal határolt.



6. ábra. Egyszeresen érintkező, keresztezésmentes hurokpárral stabilan csomagolható téglatestek oldalárányai ($c = 1$): a szürke tartomány a (6) és (7) egyenlőtlenségek metszethalmazai által alkotott unió ((6b) az alsó, (7b) a felső kontúrvonalnak felel meg), a görbék 0-hoz, $1/3$ -hoz és 1-hez tartanak, a tartomány nem szimmetrikus.

Ismét kérdés lehet az optimális kötélhossz-arány, amely azonban most nem konstans. A stabil egyenes csomagoláshoz viszonyítva az optimumarány

$$f^{1/2} = \left(\frac{(4a + 3b + c)^2 + (b + c)^2}{(4a + 4b + 4c)^2} \right)^{1/2},$$

amely mindig egynél kisebb, hiszen

$$(4a + 3b + c)^2 + (b + c)^2 \leq (4a + 3b + c + b + c)^2 < (4a + 4b + 4c)^2.$$

Az f érték minimuma azt is megmutatja, hogy mely a, b, c oldalakkal rendelkező téglatest csomagolása optimalizálható leginkább és mi ennek a mértéknek a maximuma ($f^{1/2}$ minimuma). Keressük az egyszerűség kedvéért f minimumát $c = 1$ felvétele mellett. Ehhez f a szerinti deriváltja

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(a, b)}{\partial a} &= 2(4a + 3b + 1) \cdot 4 \cdot (4a + 4b + 4)^2 - ((4a + 3b + 1)^2 + (b + 1)^2) \cdot 2(4a + 4b + 4) \cdot 4 \\ &= 16(4a + 4b + 4)(2a(b + 3) + b^2 + 4b + 1), \end{aligned}$$

amely minden konstans b mellett $a \geq 0$ -nak szigorúan monoton növekvő függvénye, következésképpen f -nek a geometriailag lehetséges paramétertartományon belül nincs analitikus értelemben vett szélsőértéke, azaz a legkisebb értéket csak a kontúrvonalak valamelyikén kaphatjuk. Keressük a (6b) által megadott kontúr mentén $f_1(b)$ minimumát:

$$\begin{aligned} f_1(b) &= \frac{(b + 1)^2 + (b^2 + b)^2}{(b^2 + 4b + 1)^2}, \\ \frac{df_1(b)}{db} &= 0 \rightarrow (b - 1)(3b^2 + 4b + 3) = 0, \end{aligned}$$

melyről látható, hogy f_1 -nek $b = 1$ -nél van minimuma és az első derivált értéke a $b \in [0, 1[$ tartományon negatív. A most vizsgált kontúrvonalon viszont $b \in]0, 1/\sqrt{3}[$, és $f_1(1/\sqrt{3}) = 1/4$, tehát a szalaghossz elméleti alsó korlátja az egyenes csomagolás esetéhez viszonyítva $1/2$. Hasonló gondolatmenet érvényes a (7b) által definiált ágra is, itt

$$\begin{aligned} f_2(b) &= \frac{(3b^2 + 2b - 1)^2 + (b^2 - 1)^2}{4(b^2 + 1)^2}, \\ \frac{df_2(b)}{db} &= 0 \rightarrow 3b^3 - 15b^2 + 3b + 1 = 0, \end{aligned}$$

melynek zérushelyei ismét kívül esnek az $b \in]1/\sqrt{3}, 1[$ megengedett tartományon, de $f_2(1/\sqrt{3}) = 1/4$. f legkisebb értékét tehát ezen a kontúron is akkor kapjuk, ha az egyik élhossz (a) a másik kettőhöz képest elhanyagolhatóan kicsinnyé válik.

6. ÖSSZEGZÉS ÉS TOVÁBBLÉPÉS

A fentiekben bemutatott vizsgálatnak két fontos eredménye van:

- (1) Az élekkel párhuzamos kötélhurkokból álló stabil csomagoláshoz képest mind a szükséges hurkok száma, mind pedig a kötelek összes hossza csökkenthető: bizonyos oldalarányok mellett két érintkező (egy ún. alaplapp pontosan három csúcsát körülvevő) feszített hurok már stabil csomagolást ad, s ha létezik ilyen csomagolás a 2.b-c ábrának megfelelően (másod- illetve harmadszomszéd alaplappokkal), akkor azok összhossza biztosan kisebb, mint az egyenes csomagoláshoz szükséges minimum.
- (2) A 2. ábra két esete alapvetően különbözik: ha az alaplappokat egy lap választja el, akkor a kötélhossz optimumaránya a geometriai viszonyoktól független konstans ($\sqrt{10}/4$), míg két elválsztó lap esetén az optimumarány függ az oldalhosszaktól, és legnagyobb alsó korlátja $1/2$. Mindkét esetre igaz, hogy a geometriailag lehetséges paraméter-tartomány belsejében felvehető olyan stabil hurokrendszer, mely a csúcsoktól „biztonságos” távolságra fut. Ha azonban az optimum mértékének optimalizálása (milyen oldalarányok mellett adódik a legkedvezőbb optimumarány) a kérdés, akkor az így adódó geometria éppen a lehetséges paraméter-tartomány határán helyezkedik el, tehát ennek az oldalarányoknak (a vizsgálatok szerint $a : 1/\sqrt{3} : 1, a \rightarrow 0$) a közelében kis zavarás is valamely csúcs túlsó oldalára kerülő kötelet eredményezhet, ezzel a megoldás elvesztését okozva.

A hurokszám és -hossz optimalizálásának kérdése természetes módon kiterjeszthető a téglatestnél tágabb konvex poliéderhalmaz, sőt akár sima zárt felületek esetére is. Olyan testeknél, ahol a csúcsok szögdefektusa nem $\pi/2$ többszöröse, az érintkező hurkok nem feltétlenül esnek egymás folytatásába, ami a különböző hurkokban különböző kötélerőt, többszörös hurokrendszer esetén pedig így módon összetett egyensúlyi-kompatibilitási feltételt jelent. A poliédereken futó kötélhálózatok fentiek szerinti modellje alkalmas lehet alapvetően nem merev (esetleg nem kellően merev) rúdszerkezetek felszíni kötélhurkok segítségével történő utólagos merevítésének vizsgálatára is.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatás az OTKA (K100894 jelű pályázat) és a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj támogatásával készült, amiért a szerző ezúton fejezi ki köszönetét.

HIVATKOZÁSOK

- [1] T. TARNAI & J. SZABÓ. Rigidity and stability of prestressed infinitesimal mechanisms. *New Approaches to Structural Mechanics, Shells and Biological Structures*, Cambridge, UK, 245-256, 2002.
- [2] D. FUCHS & E. FUCHS. Closed geodesics on regular polyhedra. *Moscow Mathematical Journal*, 7(2):265-279, 2007.
- [3] F. KOVÁCS. Optimal packages: Binding regular polyhedra. *Engineering Optimization IV*, Taylor & Francis Group, London, ISBN 978-1-138-02725-1, 859-864, 2014.
- [4] HOFFMANN M. *Topológia és differenciálgeometria*. Jegyzet (www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tamop425/0038_matematika_Hoffmann_Miklos_-Topologia_es_differencialgeometria/ch12s02.html), Eszterházy Károly Főiskola, Eger, 2011.
- [5] W. KLINGENBERG. *Lectures on closed geodesics*, Springer, 1978.